Lycée de Khniss
Prof : M[me] Bakir

DEVOIR DE SYNTHESE N° 2

Classe : 4[ème] MATHS
Date : 6 / 3 / 2012
Durée : 4 heures

EXERCICE N°1 : ***(4 pts)***

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   Soient C = { M(x,y) tels que y = sin x + cos x ; $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ } et S est le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe $(O, \vec{\imath})$; alors le volume de S est $\frac{\pi}{2}(2+\pi)$ u.v
2) soit φ la fonction définie sur]0, +∞ [par $\varphi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt$ alors φ est dérivable sur]0,+∞[et on a : $\varphi'(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x}$.
3) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln 2$.
4) $\lim \frac{1}{n^2}\int_1^{2n} \frac{1}{x^n+1}\,dx = 0$.
5) Soit m ∈ iR ; L'ensemble des points M(x,y) tels que : $mx^2 + 4y^2 = m^2+1$; est une ellipse d'axe focal $(o,\vec{\imath})$ lorsque $0 < m < 4$.

EXERCICE N°2 : ***(5pts)***

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un carré ABCD de sens direct et de centre O. Toutes les données de l'exercice se trouvent sur la figure ci-dessous.

1)a) Caractériser le déplacement R tel que R(A) = B et R(B)=C.

b) Déterminer R(K) et montrer que (DJ) est perpendiculaire à (KC).

2) Soit g l'antidéplacement tel que g(B) = O et g(O)= C.

a) Caractériser g.

b) Déterminer g(J).

3) Soit S la similitude directe telle que S(D) = C et S (C) = J.

a) Déterminer l'image du carré DCBA par S.

b) Déterminer le rapport et l'angle de S.

c) Soit ω le centre de S. Construire ω.

d) Sachant que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, déterminer S(E).

4) Soit σ la similitude indirecte tel que $\sigma(D) = C$ et $\sigma(C) = J$.

a) Déterminer le rapport de σ.

b) Caractériser $\sigma \circ S^{-1}$ et en déduire que $\sigma(B) = E$ et $\sigma(E) = H$.

c) Soit Ω le centre de σ, montrer que $\Omega \in (DJ) \cap (BE)$. Construire Ω.

d) Déterminer $\sigma((DJ))$ et en déduire que $\Omega \in (CL)$.

e) Soit Δ l'axe de σ. Montrer que Δ est perpendiculaire à (BE) et construire Δ.

EXERCICE N° 3 : (4 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit m un paramètre réel. C_m est l'ensemble des points M(x,y) vérifiant : $(2+m)x^2+(1-m)y^2 - 8 = 0$.

1) a) Déterminer la nature de C_0.
   b) Tracer C_0.

2) Soit Γ l'ensemble des points M(x,y) vérifiant : $8x^2 - 4y^2 - 32 = 0$.

   a) Déterminer la nature de Γ et ses éléments caractéristiques.

   b) construire sur le même graphique l'ensemble Γ.

3) Soit ζ l'ensemble des points M(x,y) vérifiant : $\frac{x^2}{4} + \frac{y|y|}{8} = 1$.

   Construire ζ.(justifier la réponse)

4) soit le point I(0,4), déterminer les tangentes à C_0 issus de I.

5) Discuter suivant m la nature de C_m.

EXERCICEN°4 : ***(7 pts)***

Partie A

On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x) = \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{e^x+1}$

1) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2) Montrer que, pour tout réel x, $g'(x) = -\frac{1}{(e^x+1)^2}$.

3) En déduire que pour tout réel x, $g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$.

On note C_f la courbe de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2) a)Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = -xe^x + e^x \ln(1+e^x)$.
   b) En déduire la limite de f en $-\infty$.

3) a) justifier la dérivabilité de la fonction f sur IR.

   b) Déterminer f ' la dérivée de la fonction f et vérifier que $f'(x) = e^x g(x)$.

   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4) tracer C_f.

Partie C

Soit (U_n) la suite réelle définie sur IN* par $U_n = \int_0^1 e^{\frac{x}{n}} \ln(1+e^{-x})\,dx$.

1) a) Vérifier que pour tout réel x , $f(x) - f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.

   En déduire une primitive F de f sur IR.

   b) Hachurer sur la représentation graphique un domaine dont l'aire, en unités d'aires, est U_1.

   c) Calculer U_1.

2)a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante sur IN*.

   b) En déduire que (U_n) est convergente .On notera ρ sa limite.

   c) Montrer que pour tout $n \in$ IN*, $n(e^{\frac{1}{n}} - 1)\ln(1+\frac{1}{e}) \leq U_n \leq n(e^{\frac{1}{n}} - 1)\ln 2$.

   d) Déduire un encadrement de ρ.